Lehrbuch

der

Geometrie

für

Ober-Gymnasien.

Von

Dr. **Franz Močnik.**

Mit 352 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Zehnte Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1870.

Vorwort
zur achten Auflage.

Um den berechtigten Wünschen von Fachmännern Rechnung zu tragen, sind in der neuen Auflage des vorliegenden Lehrbuches mehrere Abschnitte einer gänzlichen Umarbeitung unterzogen worden. Indem in der Darstellung für größere Kürze und Bündigkeit gesorgt wurde, mußte insbesondere auch auf bessere Gliederung des Lehrstoffes, auf bestimmtere Fassung der Lehrsätze und Aufgaben, auf strengere Beweisführung, und hie und da auf angemessene Erweiterung des Inhaltes Bedacht genommen werden.

Bezüglich der Ausführung der Beweise suchte ich zwischen jenen mathematischen Lehrbüchern, welche dieselben den Schülern bis in die kleinsten Einzelnheiten in vollständig ausgearbeiteter Form vorführen, und denjenigen, welche nur ein heuristisches Gerippe dieser Beweise bringen, die Mitte zu halten. Die Beweise werden, je nachdem es zum Verständnisse erforderlich erscheint, bald ausführlicher gegeben, bald nur angedeutet; in jedem Falle aber wird auch minder befähigten Schülern die Vorbereitung und Wiederholung möglich gemacht. Daß in der Behandlung nicht durchaus dieselbe Gleichförmigkeit vorherrscht, rührt auch von dem Umstande her, daß das Lehrbuch für drei Classen unserer Gymnasien bestimmt ist und daher Schülern auf verschiedenen Altersstufen und bei verschiedenem Fortschritte mathematischer Erkenntnis genügen soll.

Die Parallelentheorie wurde vollständig umgearbeitet; sie stützt sich auf den Grundsatz: wenn zwei gerade Linien mit einer und derselben dritten parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel.

Die Aufnahme einiger Grundlehren der neueren Geometrie und deren wenn auch beschränkte Anwendung bei der Lösung der Berührungsprobleme des Kreises dürfte bei der immer mehr anerkannten Wichtigkeit dieses Gegenstandes von Vielen als eine willkommene Bereicherung des Inhaltes angesehen werden.

Die Lehren von der Ausmessung des Kreises und der runden Körper erhielten eine strengere Begründung; jedoch glaubte ich auch überall wenigstens andeuten zu sollen, wie sich die bezüglichen Resultate aus der Vorstellung des Kreises als eines regelmäßigen Vieleckes von unendlich vielen Seiten ganz einfach herleiten lassen, weil von dieser Vorstellungsweise, wenn sie auch eine schärfere logische Kritik nicht aushält, in der höheren Geometrie doch nicht leicht Umgang genommen werden kann.

Die Begriffe der trigonometrischen Functionen wurden zunächst für spitze Winkel am rechtwinkligen Dreiecke entwickelt, und sodann mittelst der Darstellung am Kreise für beliebig große Winkel erweitert.

In der sphärischen Trigonometrie und analytischen Geometrie habe ich keine Veranlassung gefunden, größere Veränderungen vorzunehmen.

Da die theoretische Erkenntnis mit praktischer Uebung Hand in Hand gehen soll, habe ich namentlich auch auf die Auswahl und Anordnung der Aufgaben alle Sorgfalt verwendet; Constructions- und Rechnungsaufgaben sind geschieden, von den ersteren die unbestimmten den bestimmten vorausgeschickt worden. Den schwierigeren sowie jenen Aufgaben, welche häufig als Bestandtheile des Systems angesehen werden, ist die Lösung beigefügt; bei leichteren Aufgaben habe ich die Ausführung entweder vollständig der Selbstthätigkeit des Schülers überlassen, oder, wo es nöthig erschien, auf die Sätze hingewiesen, in denen die Mittel zur Auflösung enthalten sind.

Ob die vorgenommenen Veränderungen auch Verbesserungen sind, überlasse ich dem billigen Urtheile von Fachmännern, die mindestens mein aufrichtiges Streben, die Mängel der früheren Auflagen dieses Lehrbuches möglichst zu beseitigen, nicht verkennen werden.

Graz, im November 1865.

Der Verfasser.

Vorwort

zur zehnten Auflage.

Die zehnte Auflage ist im wesentlichen mit der achten und neunten gleichlautend; neu sind nur die zwei trigonometrischen Aufgaben in §. 383 und §. 385, die mir von einem sehr verehrten Collegen und Freunde zur Aufnahme in das Buch empfohlen wurden.

Graz, im August 1869.

Der Verfasser.

Inhalt.

Fünfter Abschnitt.

Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

Sechster Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

Siebenter Abschnitt.

Der Kreis.

Achter Abschnitt.

Grundeigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im Allgemeinen.

Dritter Abschnitt.

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

Zweiter Abschnitt.

Elemente der sphärischen Trigonometrie.

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Größen, welche sich im Raume ausdehnen, heißen Raumgrößen.

Die Ausdehnung im Raume findet nach drei Hauptrichtungen statt: in die Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke).

§. 2. Ein nach allen Seiten hin begrenzter Raum wird ein Körper genannt. Ein Körper hat drei Ausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Höhe.

Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen. Eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite.

Die Grenzen einer Fläche heißen Linien. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, nämlich Länge.

Die Grenzen einer Linie heißen Puncte. Ein Punct ist ohne alle Ausdehnung *und daher keine Raumgröße.*

§ 3. Wenn sich ein Punct im Raume fortbewegt, so beschreibt er eine Linie. Bewegt sich eine Linie im Raume in einer andern Richtung, als in sich selbst oder in ihrer Verlängerung, so entsteht eine Fläche. Bewegt sich eine Fläche in einer andern Richtung, als in sich selbst oder in ihrer Erweiterung, so entsteht ein Körper.

Puncte und Linien sind nur in der Vorstellung möglich und lassen sich als solche nicht sichtbar darstellen; die Puncte und Linien auf dem Papier sind nicht wahre Puncte und Linien, sondern nur Zeichen derselben.

§. 4. *Man unterscheidet gerade und krumme Linien.*

Die gerade Linie, auch bloß Gerade genannt, ist eine Grundvorstellung und daher keiner strengen Erklärung fähig. Auf der Vorstellung der geraden Linie beruhen folgende Grundeigenschaften derselben:

1. Zwischen zwei Puncten ist nur eine gerade Linie möglich. Durch zwei Puncte wird daher eine gerade Linie der Länge und der Lage nach vollkommen bestimmt. Zwei gerade Linien, welche zwei Puncte gemeinschaftlich haben, bilden eine einzige gerade Linie.
2. Die Gerade ist die kürzeste Linie, welche zwischen zwei Puncten gezogen werden kann. *Sie dient daher dazu, die Entfernung oder den* Abstand zweier Puncte von einander zu bestimmen.
3. Zwei gerade Linien können sich nur in einem Puncte treffen oder durchschneiden. Der gemeinschaftliche Punct zweier Linien heißt ihr Durchschnittspunct.

Eine Linie, welche aus geraden Linien zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist, wird eine gebrochene Linie genannt.

Eine Linie, von der kein Theil gerade ist, heißt krumm.

Ein Punct wird durch einen Buchstaben bezeichnet. Eine Linie wird dadurch bezeichnet, daß man zwei oder mehrere Puncte, die in ihr liegen, andeutet.

§. 5. Die Flächen werden in ebene und gekrümmte eingetheilt.

Eine ebene Fläche, auch bloß Ebene, ist eine Fläche, bei welcher jede Gerade, welche zwei Puncte der Fläche verbindet, ganz in dieselbe fällt.

Eine Fläche, von der kein Theil eine Ebene ist, heißt eine gekrümmte Fläche.

Jede begrenzte Fläche wird eine Figur genannt. Eine ebene Figur ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien eingeschlossen wird.

Die Linien, von denen eine Figur begrenzt wird, nennt man die Seiten derselben, und die Summe aller Grenzlinien den Umfang. Die Größe der Fläche, welche eine Figur einschließt, wird der Flächeninhalt der Figur genannt.

§. 6. Man unterscheidet eckige und runde Körper.

Ein Körper heißt eckig, wenn er von lauter Ebenen begrenzt, rund, wenn er nicht von lauter ebenen, sondern entweder bloß von gekrümmten, oder theils von ebenen, theils von gekrümmten Flächen eingeschlossen wird.

Die Summe aller Grenzflächen eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und den von ihnen eingeschlossenen Raum den Körperinhalt oder Cubikinhalt.

§. 7. Eine Größe messen heißt untersuchen, wie oft eine andere als bekannt angenommene Größe derselben Art in ihr enthalten ist.

Jede Raumgröße kann nur durch eine gleichartige Raumgröße gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper.

Die als bekannt angenommene Größe heißt die Einheit, die Zahl, welche angibt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, die Maßzahl, und die benannte Maßzahl bei Linien die Länge, bei Flächen und Körpern der Inhalt.

§. 8. Die Geometrie betrachtet an den Raumgrößen nicht nur die Größe, d. i. das Maß der Ausdehnung, sondern auch die Form oder Gestalt, d. i. die Art, wie die einzelnen Theile an einander geordnet sind, und die Lage, d. i. die Größe der Entfernungen von bekannten Puncten, Linien oder Flächen.

Zwei Raumgrößen können gleiche Größe haben, aber in der Form verschieden sein; eben so können zwei Raumgrößen gleiche Form und verschiedene Größe haben.

Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; Raumgrößen, welche dieselbe Form haben, heißen ähnlich; Raumgrößen, welche gleiche Größe und gleiche Form haben, nennt man congruent.

Um anzuzeigen, daß zwei Größen gleich sind, wird dazwischen das Zeichen $=$ (gleich) gesetzt; die Aehnlichkeit wird durch das Zeichen $\sim$ (ähnlich) und die Congruenz durch die Verbindung beider Zeichen, nämlich durch $\cong$ (congruent) ausgedrückt.

Congruente Raumgrößen unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, und müssen, wenn sie über einander gelegt werden, in allen Begrenzungen zusammenfallen, oder was dasselbe ist, sie müssen sich vollkommen decken.

§. 9. Die Wissenschaft von den Raumgrößen, insofern an ihnen die Eigenschaften des Raumes betrachtet werden, heißt Geometrie.

Die Geometrie zerfällt in zwei Haupttheile: die Planimetrie und Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie handelt von jenen Raumgrößen, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie beschäftigt sich dagegen mit jenen Raumgrößen, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sondern sich auch noch außerhalb derselben ausdehnen.

Von diesen zwei Hauptabtheilungen scheidet man einen Theil aus, der sich von der ursprünglichen Betrachtung der Raumgrößen nur in der Behandlungsweise dadurch unterscheidet, daß er an die Stelle der Construction (§. *10*) die Rechnung setzt. Dieser Theil der Geometrie heißt die Trigonometrie.

Jener Theil der Geometrie endlich, welcher die Lage der verschiedenen Raumgrößen, und zwar gleichfalls durch die Rechnung darzustellen sucht, wird die analytische Geometrie genannt.

§. **10.** Die Geometrie errichtet ihr wissenschaftliches Gebäude auf dem Grunde von Erklärungen, Grundsätzen und Forderungssätzen, durch Lehrsätze, die sie beweist, und Aufgaben, die sie löst, durch Zu- und Folgesätze, die sie anschließt.

Eine Erklärung ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffes. Im weitern Sinne versteht man darunter die Angabe alles dessen, was bei einer folgenden Entwicklung zu Grunde gelegt wird.

Ein Grundsatz ist ein Satz, dessen Wahrheit als von selbst einleuchtend vorausgesetzt wird.

Ein Satz, welcher eine geometrische Wahrheit ausspricht, deren Richtigkeit nicht an und für sich selbst einleuchtet, sondern erst begründet werden muß, heißt ein geometrischer Lehrsatz. Durch jeden solchen Satz wird ausgesagt, daß, wenn einer oder mehreren Raumgrößen eine bestimmte Eigenschaft zugesprochen wird, denselben nothwendig auch andere bestimmte Eigenschaften zukommen. Ein geometrischer Lehrsatz besteht demnach im Allgemeinen aus zwei Theilen: aus einer Voraussetzung, auch Annahme oder Bedingung, und aus einer Behauptung oder Folgerung. Jeder Lehrsatz bedarf, um von uns für wahr erkannt zu werden, einer Begründung oder eines Beweises. Durch diesen muß gezeigt werden, daß wenn die Voraussetzung statt findet, nothwendig auch die Folgerung statt finden müsse. Der Beweis kann manchmal unmittelbar aus der Erklärung der Voraussetzung hergenommen werden, indem man zeigt, daß schon in der Voraussetzung, wenn man die darin vorkommenden Begriffe zergliedert, auch die Folgerung enthalten ist; in den meisten Fällen jedoch muß man sich dabei auf andere, bereits als wahr anerkannte Sätze berufen, und es müssen häufig auch Hilfslinien gezogen werden, um den Zusammenhang zwischen den bekannten Lehrsätzen und dem erst zu begründenden Satze zu erkennen. Die Beweise sind entweder direct oder indirect. Bei einem directen Beweise werden die Gründe, aus denen die Wahrheit des Satzes hervorgeht, unmittelbar angegeben; bei dem indirecten Beweise aber wird auf die Wahrheit einer Behauptung geschlossen, indem man nachweiset, daß die Annahme der entgegengesetzten Behauptung zu Folgerungen führen würde, welche mit schon als wahr erkannten Sätzen in offenbarem Widerspruch stehen.

Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Behauptung, und die Behauptung des ersten als Voraussetzung enthält. Wenn ein Lehrsatz wahr ist, so ist nicht immer auch dessen Umkehrung wahr; sie muß besonders bewiesen werden.

Sätze, welche unmittelbar oder durch einfache Schlüsse aus vorhergehenden Sätzen folgen, heißen Folgesätze.

Ein Forderungssatz (Postulat) ist die Aufstellung einer Forderung, deren Möglichkeit und Art der Erfüllung ohne weitere Anweisung einleuchtet.

Eine geometrische Aufgabe spricht die Forderung aus, ein geometrisches Gebilde zu verzeichnen, welches gegebenen Bedingungen entspricht. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe des Verfahrens, wodurch die in der Aufgabe verlangte Zeichnung oder Construction ausgeführt wird. Bei der Auflösung der Aufgaben kommt es beinahe in allen Fällen auf die Bestimmung von gewissen Puncten an, von deren Lage die Figur abhängt, und es werden dabei die verschiedenen geometrischen Lehrsätze zu Grunde gelegt. Die Construction erscheint manchmal als unmittelbare Folge eines bereits erwiesenen Lehrsatzes, meistens aber steht sie mit demselben nur in einem mehr versteckten mittelbaren Zusammenhange, oder beruhet gar auf der Combination mehrerer Lehrsätze. Um bei den Aufgaben der ersteren Art zu der Auflösung zu gelangen, überlege man, ob nicht ein Lehrsatz bekannt ist, in welchem das in der Aufgabe Verlangte als Folgerung ausgesprochen wird; die Voraussetzung eines solchen Lehrsatzes zeigt sodann den Weg zur Construction. In jedem Falle aber muß der Construction eine verständige Beurtheilung der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen vorausgehen, welche durch die sogenannte geometrische Analysis wesentlich erleichtert wird. Die Analysis nimmt nämlich die in der Aufgabe verlangte Zeichnung als fertig an, und untersucht dann an dieser Figur den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken. Sind nun an einer solchen Figur zunächst diejenigen Puncte aufgefunden worden, welche unmittelbar durch die gegebenen Stücke bestimmt werden, so sucht man die Beziehungen auf, in welchen zu diesen schon bestimmten Puncten diejenigen stehen, die noch als gesucht betrachtet werden müssen, und deren Abhängigkeit von den gegebenen Stücken eine mehr mittelbare ist; aus diesen Beziehungen wird man endlich durch Anwendung von geometrischen Lehrsätzen erkennen, wie die gesuchten Puncte aus den gegebenen gefunden werden können. Eine Constructionsaufgabe, welche nur eine einzige Auflösung oder eine genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen zuläßt, heißt bestimmt; eine Aufgabe, welche unendlich viele Auflösungen zuläßt, heißt unbestimmt. Zur Auflösung der unbestimmten Aufgaben dienen insbesondere die geometrischen Oerter, d. i. Linien, welche die Eigenschaft haben, daß alle darin liegenden Puncte, aber auch nur diese, einer bestimmten Bedingung Genüge leisten. Die geometrischen Oerter sind aber auch ein wichtiges Hilfsmittel für die Lösung bestimmter Aufgaben, weil die dabei verlangten Puncte meistens durch den Durchschnitt zweier Linien, die man als geometrische Oerter betrachtet, erhalten werden.

In vielen Fällen wird man zum Auffinden der Auflösung auch durch die Analogie mit einer schon gelösten Aufgabe, oder durch die Reduction auf eine einfachere Aufgabe geleitet.

Ist die Analysis einer Aufgabe gehörig durchgeführt worden, so unterliegt die Construction keiner weiteren Schwierigkeit; man braucht dabei nur der Analysis Schritt für Schritt zu folgen, und die Puncte, welche zur Bestimmung der durch die Aufgabe verlangten Figur nöthig sind, genau in der Ordnung aus einander abzuleiten, in welcher sie in der Analysis als gegeben oder aus einander folgend nachgewiesen wurden.

Nun bedarf es noch des **Beweises**, daß durch die ausgeführte Construction wirklich allen in der Aufgabe gestellten Anforderungen entsprochen werde. *Dieser ergibt sich meistens aus der Construction selbst, oder auch aus der Analysis*, indem man in dem analytischen Entwicklungsgange zurückschreitend, die Schlüsse, wie sie in der Analysis aus einander hervorgehen, im Beweise gerade in umgekehrter Ordnung auf einander folgen läßt.

Zur vollständigen Durchführung einer Aufgabe gehören demnach vier Stücke: die **Aufgabe** selbst, die **Analysis**, die **Auflösung** oder **Construction** und der **Beweis**.

Die Analysis ist nicht nothwendig, wenn die Erfüllung der durch die Aufgabe *gestellten Forderung bereits als Folge bekannter Voraussetzungen in einem* früheren Lehrsatze ausdrücklich enthalten ist.

Außer den geometrischen Constructionsaufgaben gibt es auch **geometrische Rechnungsaufgaben**, d. i. Aufgaben, welche sich auf die Berechnung geometrischer Größen mit Hilfe der Zahl beziehen.

Ein **Zusatz** *ist ein Satz*, der in einem Grundsatze, oder in einem bewiesenen Lehrsatze, oder in einer aufgelösten Aufgabe, oder in dem beigefügten Beweise zum Theil schon enthalten ist, oder aus denselben leicht abgeleitet *werden kann*.