

HAUPTSÄTZE  
DER  
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-  
RECHNUNG,

ALS LEITFADEN  
ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ZWEITER THEIL.

MIT 15 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

---

BRAUNSCHWEIG,  
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.



HAUPTSÄTZE  
DER  
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-  
RECHNUNG.

---

ZWEITER THEIL.

---

HAUPTSÄTZE  
DER  
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-  
RECHNUNG,

ALS LEITFADEN  
ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

---

ZWEITER THEIL.

---

MIT 15 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

---

BRAUNSCHWEIG,  
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

## VORWORT.

---

Das vorliegende zweite Heft des „Leitfadens zur Vorlesung über Differential- und Integralrechnung“ giebt den Stoff wieder, welcher an hiesiger Hochschule im zweiten Studiensemester zur Behandlung kommt. Einige Gegenstände aus dem letzten Kapitel sind zwar mehrfach erst in der Vorlesung des dritten Semesters zum Vortrag gekommen, welche dann in der Hauptsache der Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen gewidmet bleibt.

In Anordnung und Art der Darstellung schliesst sich das zweite Heft durchaus an das zu Beginn des Jahres erschienene erste Heft an.

Die beifällige Aufnahme dieses ersten Heftes seitens der Herren Fachgenossen ist mir durch zahlreiche Zuschriften bezeugt. Diese letzteren sind sämmtlich für mich sehr ehrend und interessant gewesen, und ich wollte bei dieser Gelegenheit meinem lebhaftesten Danke Ausdruck geben.

Braunschweig, im März 1897.

Robert Fricke.

# INHALTSVERZEICHNISS.

## IX. Capitel.

### Complexe Zahlen und Functionen complexer Variablen.

	Seite
1. Einführung der complexen Zahlen . . . . .	1
2. Rechnungsregeln für complexe Zahlen . . . . .	2
3. Geometrische Deutung der complexen Zahlen . . . . .	3
4. Geometrische Deutung der Addition und Multiplication complexer Zahlen . . . . .	4
5. Der Moivre'sche Lehrsatz . . . . .	6
6. Radicirung complexer Zahlen, Einheitswurzeln . . . . .	6
7. Unendliche Reihen mit complexen Gliedern . . . . .	8
8. Functionen einer complexen Variablen . . . . .	10
9. Zusammenhang der Exponentialfunction mit den Functionen $\sin z$ und $\cos z$ . . . . .	11
10. Die Additionstheoreme der Functionen $e^z$ , $\sin z$ , $\cos z$ . . . . .	12
11. Die Periodicität der Functionen $\sin z$ , $\cos z$ , $e^z$ . . . . .	13
12. Die Function $\log z$ für complexes Argument . . . . .	14
13. Die cyclometrischen Functionen mit complexem Argument . . . . .	15
14. Differentiation und Integration der Functionen einer complexen Variablen . . . . .	15

## X. Capitel.

### Hilfssätze aus der Algebra.

1. Fundamentalsatz der Algebra nebst Anwendungen . . . . .	17
2. Partialbruchzerlegung der rationalen Functionen . . . . .	18
3. Partialbruchzerlegung bei lauter einfachen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ . . . . .	19

## XI. Capitel.

### Weiterführung der Integralrechnung.

1. Integration rationaler Differentiale . . . . .	20
2. Integration von Differentialen mit der $n^{\text{ten}}$ Wurzel aus einer linearen Function . . . . .	22
3. Integration von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Function $2^{\text{ten}}$ Grades . . . . .	23
4. Zweites Integrationsverfahren von Differentialen mit der Quadratwurzel aus einer ganzen Function $2^{\text{ten}}$ Grades . . . . .	24

	Seite
5. Fundamentalsatz über die Integrale algebraischer Differentiale . . . . .	27
6. Partielle Integration bei transcedenten Differentialen . . . . .	28
7. Integration durch unendliche Reihen . . . . .	30
8. Entwicklung von $\frac{\pi}{2}$ in ein unendliches Product . . . . .	30
9. Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale . . . . .	32

## XII. Capitel.

### Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variablen.

1. Die Functionen zweier unabhängiger Variablen . . . . .	33
2. Differentiation der Functionen $z = f(x, y)$ . . . . .	34
3. Differentiation impliciter Functionen . . . . .	35
4. Verallgemeinerung auf Functionen beliebig vieler Variablen . . . . .	36
5. Die partiellen Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	37
6. Die totalen Differentiale höherer Ordnung . . . . .	38
7. Die Taylor'sche Reihe für Functionen mehrerer Variablen . . . . .	39
8. Integration zweigliedriger totaler Differentialausdrücke . . . . .	41
9. Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter . . . . .	42

## XIII. Capitel.

### Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variablen.

1. Die Maxima und Minima einer Function $f(x, y)$ . . . . .	45
2. Geometrische Deutung der Maxima und Minima einer Function $f(x, y)$ . . . . .	48
3. Die Maxima und Minima einer Function von mehr als zwei Variablen . . . . .	49
4. Maxima und Minima bei Angabe von Nebenbedingungen . . . . .	50

## XIV. Capitel.

### Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variablen.

1. Die Tangenten und Normalen einer ebenen Curve . . . . .	52
2. Die singulären Punkte einer ebenen Curve . . . . .	53
3. Die Tangentialebenen, Tangenten und Normalen einer krummen Fläche . . . . .	55
4. Die Tangenten, Normalebenen u. s. w. einer Raumcurve . . . . .	56
5. Curvenschaaren und deren einhüllende Curven . . . . .	58
6. Cubatur der Volumina . . . . .	60
7. Complanation der krummen Flächen . . . . .	62
8. Gebrauch der Polarcoordinaten . . . . .	64
9. Betrachtung weiterer Beispiele zur Cubatur und Complanation . . . . .	64
Zusätze zum ersten Heft . . . . .	66

## IX. Capitel.

# Complexe Zahlen und Functionen complexer Variablen.

### 1. Einführung der complexen Zahlen.

Die quadratische Gleichung  $x^2 = -1$  kann weder durch eine positive, noch durch eine negative Zahl  $x$ , noch auch durch  $x = 0$  gelöst werden.

Sagt man demnach [unter Beibehaltung des auf die in I, 1<sup>1)</sup> eingeführten Zahlen bezogenen Operationszeichens der Quadratwurzelziehung],  $x = \sqrt{-1}$  sei eine Lösung der Gleichung  $x^2 = -1$ , so ist in  $\sqrt{-1}$  ein gegenüber 1, 1 neuer Zahlbegriff geschaffen. Diese neue Zahl  $\sqrt{-1}$ , welche auch abgekürzt mit  $i$  bezeichnet wird, hat zunächst nur die Eigenschaft, mit sich selbst multiplicirbar zu sein und dabei das Product  $-1$  zu geben.

Um die Zahl  $i$  ausgedehnter in Benutzung zu nehmen, giebt man die

*Erklärung: Die Zahl  $i$  soll den bisherigen ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen hinzugesellt werden, und in dem solcher-gestalt erweiterten Zahlensysteme sollen alle die vier Grundrechnungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division betreffenden Regeln unverändert bestehen bleiben.*

Bei Ausführung der Operationen der Addition u. s. w. auf die Zahlen des vorliegenden Systems tritt eine neue Erweiterung dieses Systems ein: aus zwei Zahlen  $a, b$  der bisherigen Art und der Zahl  $i$  erzeugt man durch Multiplication und Addition die Zahl  $(a + i \cdot b)$  oder kurz  $(a + ib)$ .

*Erklärung: Die so zu gewinnenden Zahlen  $(a + ib)$  heißen „complexe Zahlen“. Ist von den Zahlen  $a, b$  die letzte,  $b$ , allein  $\geq 0$ , so spricht man von einer „rein imaginären“ Zahl; und man nennt  $i$  oder*

<sup>1)</sup> Diese Abkürzung bedeutet: „I. Capitel, Nr. 1“.

Da man hier die Gleichung  $z - \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) = 0$  hat, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}} = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Man hat also zufolge (2) Nr 8:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} dr \right) d\vartheta = \left( \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} dr \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \right).$$

Durch Ausführung der letzten Integrale gewinnt man:

$$(2) \quad \dots \quad S = \frac{\pi}{4} [\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})].$$

### Zusätze zum ersten Heft.

Seite 40, Zeile 24 ist hinter den Worten „bei diesem Uebergange“ einzuschalten „in den elementaren Fällen“.

Seite 48, Zeile 18 ist hinter den Worten „Zahlen  $m$ “ einzuschalten „ausser  $m = -1$ “.