HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ZWEITER THEIL.

MIT 15 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG.

ZWEITER THEIL.

HAUPTSÄTZE

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG,

ALS LEITFADEN

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

ZWEITER THEIL.

MIT 15 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.

VORWORT.

Das vorliegende zweite Heft des „Leitfadens zur Vorlesung über Differential- und Integralrechnung“ giebt den Stoff wieder, welcher an hiesiger Hochschule im zweiten Studiensemester zur Behandlung kommt. Einige Gegenstände aus dem letzten Kapitel sind zwar mehrfach erst in der Vorlesung des dritten Semesters zum Vortrag gekommen, welche dann in der Hauptsache der Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen gewidmet bleibt.

In Anordnung und Art der Darstellung schliesst sich das zweite Heft durchaus an das zu Beginn des Jahres erschienene erste Heft an.

Die beifällige Aufnahme dieses ersten Heftes seitens der Herren Fachgenossen ist mir durch zahlreiche Zuschriften bezeugt. Diese letzteren sind sämmtlich für mich sehr ehrend und interessant gewesen, und ich wollte bei dieser Gelegenheit meinem lebhaftesten Danke Ausdruck geben.

Braunschweig, im März 1897.

Robert Fricke.

INHALTSVERZEICHNISS.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

X. Capitel.

Hülfssätze aus der Algebra.

XI. Capitel.

Weiterführung der Integralrechnung.

XII. Capitel.

Differentiation und Integration der Functionen mehrerer unabhängigen Variabelen.

XIII. Capitel.

Bestimmung der Maxima und Minima einer Function mehrerer Variabelen.

XIV. Capitel.

Geometrische Anwendungen der Functionen mehrerer Variabelen.

IX. Capitel.

Complexe Zahlen und Functionen complexer Variabelen.

1. Einführung der complexen Zahlen.

Die quadratische Gleichung $x^2 = -1$ kann weder durch eine positive, noch durch eine negative Zahl x, noch auch durch $x = 0$ gelöst werden.

Sagt man demnach [unter Beibehaltung des auf die in I, 1 [1]) eingeführten Zahlen bezogenen Operationszeichens der Quadratwurzelziehung], $x = \sqrt{-1}$ *sei eine Lösung der Gleichung* $x^2 = -1$, *so ist* in $\sqrt{-1}$ ein gegenüber I, 1 neuer Zahlbegriff geschaffen. Diese neue Zahl $\sqrt{-1}$, welche auch abgekürzt mit i bezeichnet wird, hat zunächst *nur* die Eigenschaft, *mit sich selbst multiplicirbar zu sein und dabei das Product* -1 *zu geben.*

Um die Zahl i ausgedehnter in Benutzung zu nehmen, giebt man die

Erklärung: *Die Zahl i soll den bisherigen ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen hinzugesellt werden, und in dem solchergestalt erweiterten Zahlensysteme sollen alle die vier Grundrechnungen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division betreffenden Regeln unverändert bestehen bleiben.*

Bei Ausführung der Operationen der Addition u. s. w. auf die Zahlen des vorliegenden Systems tritt eine neue Erweiterung dieses Systems ein: aus zwei Zahlen a, b der bisherigen Art und der Zahl i erzeugt man durch Multiplication und Addition die Zahl $(a + i \cdot b)$ oder kurz $(a + ib)$.

Erklärung: *Die so zu gewinnenden Zahlen $(a + ib)$ heissen „complexe Zahlen". Ist von den Zahlen a, b die letzte, b, allein $\gtrless 0$, so spricht man von einer „rein imaginären" Zahl; und man nennt i oder*

[1]) Diese Abkürzung bedeutet: „I. Capitel, Nr. 1".

Da man hier die Gleichung $z - arctg\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ hat, so gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}} = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Man hat also zufolge (2) Nr 8:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr\right) d\vartheta = \left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\right).$$

Durch Ausführung der letzten Integrale gewinnt man:

(2) . . . . . $S = \frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$.

Zusätze zum ersten Heft.

Seite 40, Zeile 24 ist hinter den Worten „bei diesem Uebergange" einzuschalten „in den elementaren Fällen".

Seite 48, Zeile 18 ist hinter den Worten „Zahlen m" einzuschalten „ausser $m = -1$".