



373



HAUPTSÄTZE  
DER  
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-  
RECHNUNG.

---

ERSTER THEIL.

---



HAUPTSÄTZE  
DER  
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-  
RECHNUNG,  
ALS LEITFADEN  
ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

DR. ROBERT FRICKE,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRAUNSCHWEIG.

---

ERSTER THEIL.

---

MIT 45 IN DEN TEXT GEDRÜCKTEN FIGUREN.

---

BRAUNSCHWEIG,  
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1897.



## V O R W O R T.

---

Die hier gebotene Darstellung der Grundsätze der Differential- und Integralrechnung ist in erster Linie für die Studirenden an technischen Hochschulen bestimmt. Sie soll denselben eine Erleichterung in der Auffassung der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, aber keinen Ersatz dieser Vorlesung bieten. Es erscheint hier nur mehr der wesentlichste Gedankeninhalt jener Vorlesung in knapper, jedoch sachlich ziemlich vollständiger Form zusammengetragen. Alle näheren Darlegungen und zumal fast alle Ausführungen an Beispielen bleiben der Vorlesung selber vorbehalten.

Die Strenge in den Begriffsbildungen und den Beweisführungen habe ich so weit getrieben, als sie mir zweckmässig und durchführbar schien. Dass vereinzelte Wendungen dem scharfen Urtheil nicht genehm erscheinen werden, weiss ich sehr wohl; doch darf ich zur Entschuldigung auf den Zweck hinweisen, dem der Leitfaden dienen soll.

Das vorliegende erste Heft umfasst den Stoff, welcher in der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung während des ersten Semesters zu bewältigen ist. Die Anordnung ist so gewählt, dass zu Beginn des zweiten Semesters die Vorlesungen über technische Mechanik ungehindert einsetzen können.

Es ist für das Verständniss der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung von grundlegender Wichtigkeit, die zu entwickelnden abstracten Vorstellungen, wo es immer angeht, durch anschauliche Beispiele zu beleben. Die Geometrie der Curven und für die späteren Theile diejenige der Oberflächen bieten hier eine fast unerschöpfliche Fundgrube zweckmässiger Beispiele. Hierbei handelt es sich um Anschauungen, die allen Zuhörern gleichmässig zugänglich sind, und die ohnehin durch die gleichzeitigen geometrischen Vorlesungen befördert werden.

In den mathematischen Vorlesungen der späteren Semester wird man entsprechend die bis dahin entwickelten technischen Vorlesungen für die Auswahl von Beispielen verwerthen. Wollte man dies bereits im ersten Semester bei der Grundlegung der Differentialrechnung versuchen, so würde bei der Zusammensetzung der Zuhörerschaft dadurch aus nahe liegenden Gründen das Verständniss der Vorlesung nicht unerheblich erschwert werden.

Braunschweig, im December 1896.

**Robert Fricke.**



# INHALTSVERZEICHNISS

## I. Capitel.

### Einleitung in die Differentialrechnung.

	Seite
1. Veränderliche und unveränderliche Grössen . . . . .	1
2. Begriff der Functionen und geometrische Deutung derselben . . . . .	1
3. Inversion oder Umkehrung der Functionen . . . . .	3
4. Die rationalen und die irrationalen Functionen . . . . .	4
5. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Functionen . . . . .	5
6. Exponentialfunction und Logarithmus . . . . .	5
7. Gradmaass und Bogenmaass der Winkel . . . . .	6
8. Die trigonometrischen Functionen . . . . .	7
9. Die cyclometrischen Functionen . . . . .	8
10. Algebraische und transcendente Functionen . . . . .	9
11. Zusammengesetzte Functionen . . . . .	9
12. Der Begriff der Grenze . . . . .	10
13. Stetigkeit einer Variablen und stetige Annäherung an eine Grenze	11
14. Einführung der Zahl $e$ . . . . .	12
15. Stetigkeit der Functionen . . . . .	13

## II. Capitel.

### Erklärung und Berechnung des Differentialquotienten einer Function $f(x)$ .

1. Der Differentialquotient einer Function $f(x)$ . . . . .	14
2. Die Differentiale und der Differentialquotient einer Function $f(x)$ . . . . .	15
3. Die derivirte oder abgeleitete Function $f'(x)$ . . . . .	16
4. Unstetigkeiten der abgeleiteten Function . . . . .	17
5. Differentiation einer Summe, sowie eines Productes aus einer Constanten und einer Function . . . . .	17
6. Differentiation der Potenz und der ganzen rationalen Function . . . . .	18
7. Differentiation des Logarithmus. Der natürliche Logarithmus . . . . .	18
8. Differentiation der Exponentialfunction. Die Exponentialgrösse . . . . .	19
9. Differentiation der trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$ . . . . .	20
10. Differentiation der cyclometrischen Functionen $\arcsin x$ und $\arccos x$ . . . . .	21
11. Differentiation des Productes und des Quotienten zweier Functionen . . . . .	22
12. Differentiation der rationalen Functionen, speciell der Function $x^{-n}$ . . . . .	22
13. Differentiation der trigonometrischen Functionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ . . . . .	23
14. Differentiation der cyclometrischen Functionen $\operatorname{arctg} x$ und $\operatorname{arccotg} x$ . . . . .	23

	Seite
15. Differentiation zusammengesetzter Functionen . . . . .	24
16. Differentiation der Function $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ . . . . .	24
17. Die logarithmische Differentiation . . . . .	25
18. Bemerkung über die Art der abgeleiteten Functionen . . . . .	26

### III. Capitel.

#### Die Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung einer Function $f(x)$ .

1. Die Ableitungen höherer Ordnung einer Function $f(x)$ . . . . .	26
2. Die $n^{\text{te}}$ Ableitung des Productes zweier Functionen . . . . .	27
3. Beweis des binomischen Lehrsatzes . . . . .	28
4. Die Differenzenquotienten höherer Ordnung von $f(x)$ . . . . .	28
5. Die Differentialquotienten und Differentiale höherer Ordnung von $y = f(x)$ . . . . .	29
6. Die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung . . . . .	30

### IV. Capitel.

#### Bestimmung der Maxima und Minima einer Function $f(x)$ .

1. Satz über das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$ . . . . .	32
2. Die Maxima oder Minima einer Function $f(x)$ . . . . .	32
3. Gebrauch der höheren Ableitungen zur Bestimmung der Maxima und Minima von $f(x)$ . . . . .	34

### V. Capitel.

#### Betrachtung des Verlaufes ebener Curven.

1. Die Tangenten und Normale einer ebenen Curve . . . . .	35
2. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale der Curve $C$ für einen Punkt $P$ . . . . .	36
3. Bogendifferential der Curve $C$ . . . . .	36
4. Beispiele zur Berechnung der Tangenten, Normalen u. s. w. . . . .	37
5. Concavität und Convexität der Curven . . . . .	39
6. Wende- oder Inflexionspunkte einer Curve . . . . .	40
7. Die Krümmungskreise einer Curve . . . . .	40
8. Die Evoluten und Evolventen . . . . .	42
9. Gleichung der Evolute und Beispiele . . . . .	43
10. Einführung der Polarcordinaten . . . . .	45
11. Erklärung von Polartangente, Polarnormale u. s. w. . . . .	46

### VI. Capitel.

#### Grundlagen der Integralrechnung.

1. Begriff des unbestimmten Integrals . . . . .	47
2. Unmittelbare Integration einiger Differentiale . . . . .	48
3. Zwei Hilfssätze zur Integration der Differentiale . . . . .	48
4. Integration durch Substitution einer neuen Variablen . . . . .	49
5. Methode der partiellen Integration . . . . .	50
6. Begriff des bestimmten Integrals . . . . .	51
7. Zusammenhang zwischen den bestimmten und den unbestimmten Integralen . . . . .	53



	Seite
8. Integration bis $x = \infty$ oder bis zu einer Unstetigkeitsstelle von $\varphi(x)$	54
9. Lehrsätze über bestimmte Integrale . . . . .	55
10. Quadratur ebener Curven . . . . .	56
11. Rectification ebener Curven . . . . .	57
12. Gebrauch der Polarcoordinaten . . . . .	58
13. Cubatur der Rotationskörper . . . . .	59
14. Complanation der Rotationsoberflächen . . . . .	59

## VII. Capitel.

## Theorie der unendlichen Reihen.

1. Begriffe der Convergenz und Divergenz einer Reihe . . . . .	60
2. Lehrsätze über convergente Reihen . . . . .	61
3. Convergenzkriterium für Reihen aus positiven Gliedern . . . . .	63
4. Bedingt und unbedingt convergente Reihen . . . . .	64
5. Begriff der Potenzreihen . . . . .	66
6. Vorentwickelungen zu den Sätzen von Taylor und Mac-Laurin . . . . .	67
7. Der Taylor'sche Lehrsatz . . . . .	68
8. Der Mac-Laurin'sche Lehrsatz . . . . .	69
9. Reihenentwicklung der Exponentialfunction . . . . .	70
10. Reihenentwicklung der Functionen $\sin x$ und $\cos x$ . . . . .	71
11. Reihenentwicklung der Function $\log(1+x)$ . . . . .	71
12. Die Binomialreihe . . . . .	73
13. Methode der unbestimmten Coëfficienten . . . . .	74

## VIII. Capitel.

Bestimmung der unter den Gestalten  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ , ... sich darstellenden  
Functionswerthe.

1. Die unbestimmte Gestalt $\frac{0}{0}$ . . . . .	76
2. Die unbestimmte Gestalt $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	77
3. Die unbestimmten Gestalten $0 \cdot \infty$ , $\infty - \infty$ , $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$ . . . . .	79