

82.

VIII
stische Formeln.

ausgewählte
Zum Gebrauche *nach*

in höheren Lehranstalten

und

bei der Vorbereitung auf das Portepceführer-,
Seekadetten- und Oberförsterexamen

zusammengestellt

von

G. Behm.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

Berlin.

G. W. F. Müller.

Bandlerstr. 29.

Wilhelm Dawovski
Mathematische Formeln.

~~~~~  
Zum Gebrauche

**in höheren Lehranstalten**

und

bei der Vorbereitung auf das Portepfeffährichs-,  
Seekadetten- und Oberförsterexamen

zusammengestellt

von

**G. Behm.**

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

—————  
**Berlin.**

**G. W. F. Müller.**

Bendlerstr. 29.

## V o r w o r t.

---

Wenngleich der Unterricht in der Mathematik hauptsächlich die erkennenden Seelenkräfte in Anspruch nimmt, so stellt er doch auch bedeutende Anforderungen an das Gedächtniß der Schüler. Nicht nur die Hinsicht auf die spätere praktische Verwerthung der Mathematik, sondern auch die Rücksicht auf den sicheren Fortschritt des Unterrichts verlangt die feste Einprägung derjenigen Sätze und Formeln, welche einer folgenden Stufe des Erkennens als Grundlage dienen. Die Erfolglosigkeit des mathematischen Unterrichts bei einer nicht unbedeutenden Anzahl von Schülern hat oft ihre Ursache weniger in einer geringen Verstandesschärfe, als darin, daß denselben die Resultate des vorangegangenen Unterrichts, namentlich wenn dieselben in Formeln bestehen, nicht gegenwärtig sind.

Aus dem Wunsche, die Einprägung mathematischer Formeln durch eine übersichtliche Zusammenstellung derselben erleichtern zu helfen, ist dieses Buch entstanden.

Die Begrenzung des Stoffes ist erfolgt nach Maßgabe der Unterrichts- und Prüfungsordnung für die Realschulen vom 6. October 1859.

In den ersten drei Theilen habe ich nur die wichtigsten Formeln aus den betreffenden Gegenständen ausgewählt, ohne dabei unter dasjenige Minimum zu gehen, welches für ein gewandtes Operiren nothwendig ist. In einem Anhange sind dann noch anderweitige Formeln gegeben.

Wenn auch einige Gegenstände, welche für den Schulunterricht nicht allgemeine Geltung erlangt haben, wie z. B. die Determinanten, Aufnahme gefunden haben, so sind die betreffenden Formeln zu einem besondern Kapitel zusammengestellt.

Die beiden letzten Theile sind im Allgemeinen etwas ausführlicher, und es wird wohl als gerechtfertigt erscheinen, wenn in einigen besonders schwierigen Abschnitten, die eine oftmalige Repetition nöthig machen, die Darstellung sich dem Tone der Lehrbücher nähert.

Es ist selbstverständlich, dafs ich bei der Auswahl der Formeln die anerkanntesten Lehrbücher zu Rathe gezogen habe. Eine Quellenangabe aber gestattete die Rücksicht auf den Raum nicht; der Sachkenner wird sogleich herausfinden, welchem Lehrbuche ich an dieser oder jener Stelle gefolgt bin.

Um den Umfang des Buches nicht über 8 Bogen auszudehnen, war ich genöthigt, den Anhang abzukürzen, nachdem schon die ersten 4 Bogen gedruckt waren, und daher sind bei der Numerirung der §§ des Anhangs einige Zahlen übersprungen.

G. Behm.

# Inhalt.



|                   |              |
|-------------------|--------------|
| Vorwort . . . . . | Seite<br>III |
|-------------------|--------------|

## Erster Theil: Arithmetik (§ 1—87).

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. Addition und Subtraction (§ 1—3) . . . . .                                         | 1  |
| II. Multiplication und Division (§ 4—8) . . . . .                                     | 2  |
| III. Potenzirung und Radicirung (§ 9—23) . . . . .                                    | 4  |
| IV. Logarithmen (§ 24—29) . . . . .                                                   | 9  |
| V. Gleichungen 1ten Grades (§ 30—32) . . . . .                                        | 11 |
| VI. Quadratische Gleichungen (§ 33—35) . . . . .                                      | 13 |
| VII. Proportionen (§ 36—38) . . . . .                                                 | 14 |
| VIII. Exponentialgleichungen (§ 39) . . . . .                                         | 16 |
| IX. Progressionen (§ 40—49) . . . . .                                                 | 16 |
| X. Zinseszinsrechnung (§ 50—53) . . . . .                                             | 17 |
| XI. Kettenbrüche (§ 54—60) . . . . .                                                  | 19 |
| XII. Combinatorik (§ 61—68) . . . . .                                                 | 20 |
| XIII. Die Binomialformel (§ 69) . . . . .                                             | 22 |
| XIV. Unbestimmte Gleichungen ersten Grades mit 2 Un-<br>bekannten (§ 70—72) . . . . . | 22 |
| XV. Kubische Gleichungen (§ 73—80) . . . . .                                          | 23 |
| XVI. Determinanten (§ 81—87) . . . . .                                                | 26 |

## Zweiter Theil: Geometrie.

### A. Planimetrie (§ 68—105).

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| I. Winkel und Diagonalen geradlinigter Figuren<br>(§ 88—89) . . . . . | 30 |
| II. Flächeninhalt geradlinigter Figuren (§ 90—92) . . . . .           | 30 |

|                                                                                                | Seite |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| III. Zusammenhang zwischen den Seiten und Linien<br>des Dreiecks (§ 93—95) . . . . .           | 31    |
| IV. Zusammenhang zwischen den Seiten und Radien<br>der regulären Polygone (§ 96—101) . . . . . | 32    |
| V. Kreisberechnung (§ 102—105) . . . . .                                                       | 33    |
| B. Stereometrie (§ 106—110).                                                                   |       |
| I. Seiten und Winkel des körperlichen $n$ -ecks (§ 106)                                        | 33    |
| II. Polyeder (§ 107—108) . . . . .                                                             | 34    |
| III. Formeln zur Berechnung des Volumens und der<br>Oberflächen (§ 109—110) . . . . .          | 35    |

### Dritter Theil: Trigonometrie.

|                                                                                                           |    |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|
| A. Die trigonometrischen Functionen<br>(§ 111—120) . . . . .                                              |    | 37 |
| B. Ebene Trigonometrie (§ 121—132).                                                                       |    |    |
| I. Das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck,<br>so wie die regulären Vielecke (§ 121—126) . . . | 41 |    |
| II. Das schiefwinklige Dreieck (§ 127—132) . . .                                                          | 42 |    |
| C. Sphärische Trigonometrie (§ 133—146)                                                                   |    |    |
| I. Das rechtwinklige sphärische Dreieck (§ 133—135)                                                       | 44 |    |
| II. Das schiefwinklige sphärische Dreieck (§ 136—146)                                                     | 45 |    |

### Vierter Theil: Algebraische Analysis (§ 147—181).

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. Von den Functionen (§ 147—150) . . . . .                                     | 50 |
| II. Ganze algebraische Functionen einer Veränderlichen<br>(§ 151—154) . . . . . | 53 |
| III. Arithmetische Reihen höherer Ordnung (§ 155—158)                           | 54 |
| IV. Figurirte Zahlen, Polygonal- und Pyramidalzahlen<br>(§ 159—164) . . . . .   | 56 |
| V. Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen<br>(§ 166—168) . . . . .     | 59 |

|      |                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| VI.  | Verwandlung der einfachen Functionen in Potenzreihen der Veränderlichen (§ 169—176) . . . . . | 61 |
| VII. | Darstellung der Sinus und Cosinus durch imaginäre Exponentialausdrücke (§ 177—181) . . . . .  | 64 |

### Fünfter Theil: Analytische Geometrie der Ebene

(§ 182—273).

|      |                                                                                    |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I.   | Parallelcoordinatensystem (§ 182—183) . . . . .                                    | 68  |
| II.  | Transformation der Coordinaten (§ 184—186) . . . . .                               | 69  |
| III. | Die geraden Linien oder die geometrischen Oerter 1ten Grades (§ 187—193) . . . . . | 70  |
| IV.  | Die Kegelschnitte oder die geometrischen Oerter 2ten Grades.                       |     |
|      | A. Der Kreis (§ 194—202) . . . . .                                                 | 73  |
|      | B. Die Parabel (§ 203—216) . . . . .                                               | 77  |
|      | C. Die Ellipse (§ 217—233) . . . . .                                               | 82  |
|      | D. Die Hyperbel (§ 234—252) . . . . .                                              | 88  |
|      | E. Verwandtschaft zwischen Parabel, Ellipse und Hyperbel (§ 253—254) . . . . .     | 95  |
| V.   | Die Curven der allgemeinen Gleichung 2ten Grades (§ 255—269) . . . . .             | 96  |
| VI.  | Polarcoordinaten (§ 270—273) . . . . .                                             | 102 |

### Anhang (§ 1—64).

|      |                                                |     |
|------|------------------------------------------------|-----|
| I.   | Zur Arithmetik (§ 1—26) . . . . .              | 105 |
| II.  | Zur Geometrie (§ 27—30) . . . . .              | 112 |
| III. | Zur Trigonometrie (§ 31—56) . . . . .          | 113 |
| IV.  | Zur algebraischen Analysis (§ 57—64) . . . . . | 118 |

(Die Reihe mit  $\lim \frac{u_n}{n_{n+1}} = 1$  convergirt oder divergirt, je nachdem von einer bestimmten Stelle ab der Quotient  $\frac{u_n}{n_{n+1}} <$  oder  $> 1$  ist.)

3) Wenn  $\lim n\alpha = 1$  ist, so divergirt die Reihe, wenn  $n\alpha$  von einer bestimmten Stelle ab stets  $< 1$  ist.

4) Zweifelhaft bleibt der Fall, in welchem  $\lim n\alpha = 1$  und von keiner Stelle ab  $n\alpha < 1$  ist.

§ 62. (Zu § 171.) Logarithmische Reihen.

$$1. \quad l(x+1) = lx + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \dots \right)$$

$$2. \quad lx = \frac{1}{2}l(x+1) + \frac{1}{2}l(x-1) + \left( \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{6x^6} + \dots \right)$$

§ 63. (Zu § 173.) Reihen für  $\tan x$  und  $\cotang x$ .

$$1. \quad \tan x = \frac{2^2(2^2-1)B_1}{1 \cdot 2} x + \frac{2^4(2^4-1)B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^5 + \dots$$

$$\left( x \text{ zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2} \right)$$

$$2. \quad \cotang x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1 \cdot 2} x - \frac{2^4 B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 - \frac{2^6 B_5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^5 - \dots$$

$$\left( x \text{ zwischen } -\frac{\pi}{2} \text{ und } +\frac{\pi}{2} \right)$$

( $B_1, B_2, B_3$  etc. sind die absoluten Werthe der Bernoullischen Zahlen.)

§ 64. (Zu § 176.) Reihe zur Berechnung der Zahl  $\pi$ .

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10} \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left( \frac{2}{10} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{2}{10} \right)^3 + \dots \right] + \frac{3}{10} \left[ 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left( \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{1}{10} \right)^3 + \dots \right]$$